# CUPRINS

Prefaţă ..................................................................................................... v
**CAPITOLUL 1. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SPAȚIILOR TOPOLOGICE ..................... 11**
1.1. Definiția spațiului topologic. Exemple. Noțiunea de vecinătate şi de punct interior pentru o mulțime ........................................................ 11
1.2. Mulțimi închise. Aderența, derivata, frontiera unei mulțimi. Mulțimi dense ....................................................................................... 17
1.3. Bază de vecinătăți a unui punct într-un spațiu topologic. Bază de deschişi, spații cu bază numărabilă ................................................ 27
1.4. Noțiunea de subspațiu topologic. Topologia indusă .............................. 30
1.5. Şiruri generalizate şi filtre în spații topologice ........................................ 32
1.6. Familii de topologii pe o mulțime dată. Relația de ordine între două topologii .................................................................................... 41
1.7. Limită şi continuitate în spații topologice ................................................ 48
1.8. Generarea unei topologii folosind proprietățile familiei vecinătăților unui punct arbitrar într-un spațiu topologic ........................... 58

**CAPITOLUL 2. TIPURI PARTICULARE DE SPAȚII TOPOLOGICE ................................. 60**
2.1. Spații topologice separate ........................................................................ 60
2.2. Spații topologice separabile ...................................................................... 63
2.3. Spații topologice regulate .......................................................................... 65
2.4. Spații topologice compacte ....................................................................... 67
2.5. Spații topologice local compacte. Compactificarea Alexandrov. Cercul şi sfera lui Riemann ...................................................................... 79
2.6. Spații topologice normale ......................................................................... 84
2.7. Spații topologice conexe ........................................................................... 86
2.8. Produse de spații topologice ..................................................................... 94

**CAPITOLUL 3. SPAȚII METRICE ......................................................................... 104**
3.1. Definiție, exemple, proprietăți generale ................................................... 104
3.2. Spații metrice complete ............................................................................ 120
3.3. Metrici topologic şi uniform echivalente ................................................... 130
3.4. Spații metrice compacte ............................................................................ 134
3.5. Spații Baire ................................................................................................ 141
3.6. Spații metrice conexe ................................................................................ 145
3.7. Compactificarea Čech-Stone. Condiții pentru ca un spațiu topologic să fie metrizabil ..................................................................... 148

**CAPITOLUL 4. SPAȚII VECTORIALE TOPOLOGICE ................................................ 160**
4.0. Spații vectoriale. Definiții, exemple, proprietăți generale ........................... 160
4.1. Tipuri remarcabile de mulțimi în spații vectoriale ....................................... 169

4.2. Funcționale liniare şi subliniare. Seminorme şi norme. Funcționala Minkowski. Teorema Hahn-Banach ........................................ 176
4.3. Varietăți liniare şi hiperplane. Proprietăți de separare ................................ 184
4.4. Spații vectoriale topologice. Definiție, exemple, proprietăți generale ........................................ 190
4.5. Mulțimi convexe, mărginite, total mărginite şi compacte în spații vectoriale topologice ........................................ 198
4.6. Spații local convexe ........................................ 204
4.7. Topologia slabă pe un spațiu local convex ........................................ 211

**CAPITOLUL 5. SPAȚII VECTORIALE NORMATE ........................................ 212**
5.1. Definiții, exemple, proprietăți generale ........................................ 212
5.2. Spații vectoriale normate finit dimensionale ........................................ 219
5.3. Spații Banach. Definiție, proprietăți, exemple de spații Banach .................. 227
5.4. Operatori liniari şi continui. Definiție, exemple. Spațiul operatorilor liniari şi continui ........................................ 238
5.5. Principii fundamentale ale Analizei Funcționale ........................................ 246
5.6. Dualul unui spațiu vectorial normat ........................................ 250
5.7. Caracterizarea dualelor unor spații concrete ........................................ 259
5.8. Comparații între spații metrice, spații vectoriale topologice şi spații vectoriale normate. Condiția de normabilitate a unui spațiu vectorial topologic ........................................ 271

**CAPITOLUL 6. INTRODUCERE ÎN TEORIA DISTRIBUȚIILOR ........................................ 275**
6.0. Preliminarii ........................................ 275
6.1. Spațiul lui Schwartz ........................................ 277
6.2. Noțiunea de distribuție. Definiție, exemple ........................................ 284
6.3. Operații cu distribuții ........................................ 289
6.4. Aplicații ale distribuțiilor ........................................ 299

**ANEXĂ. ELEMENTE DE TEORIA MĂSURII ........................................ 306**
A.1. CLASE DE MULȚIMI ........................................ 306
A.2. MĂSURI POZITIVE. DEFINIȚII, EXEMPLE, PROPRIETĂȚI ................................ 309
A.3. FUNCȚII MĂSURABILE ........................................ 315
A.4. INTEGRALA UNEI FUNCȚII REALE ÎN RAPORT CU O MĂSURĂ POZITIVĂ ........................................ 319

**INDEX DE NOȚIUNI ........................................ 326**

**BIBLIOGRAFIE ........................................ 336**

# CAPITOLUL 1. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SPAȚIILOR TOPOLOGICE

## 1.1. Definiția spațiului topologic. Exemple. Noțiunea de vecinătate şi de punct interior pentru o mulțime

**Definiția 1.1.1.** Fie $X$ o mulțime nevidă. O familie $\tau$ de submulțimi ale lui $X$ se numeşte *topologie* dacă satisface condițiile:

$1^0$) $\varnothing, X \in \tau$;

$2^0$) Pentru orice familie de indici $I$ cu $D_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I,$ avem: $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau;$

$3^0$) Dacă $A, B \in \tau$, atunci $A \cap B \in \tau$.

Elementele lui $\tau$ se numesc *mulţimi deschise.*

**Observația 1.1.2.**

a) Din condiția $3^0$) rezultă imediat, prin inducție, că pentru orice familie finită $\left(D_i\right)_{1\le i\le n}$ cu $D_i \in \tau, \forall i = \overline{1,n}$, avem:

$$\bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \tau .$$

b) După cum vom vedea, intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise nu este, în general, o mulțime deschisă.

**Exemplul 1.1.3.** Fie $X = \mathbb{R}$. Definim pe $\mathbb{R}$ următoarea topologie $\tau$: $A \in \tau$ dacă este îndeplinită una din condițiile:

i) $A = \varnothing$;

ii) Dacă $A \neq \varnothing$, atunci $\forall x \in A$, $\exists r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset A$.

Să verificăm cele trei condiții din definiția unei topologii:

1) $\varnothing, X \in \tau$, evident;

2) Fie $\left(D_\alpha\right)_{\alpha \in I} \subset \tau$ şi fie $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha$.

Atunci $\exists \alpha_0 \in I$ cu $x \in D_{\alpha_0}$, deci $\exists r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset D_{\alpha_0}$, de unde deducem că $(x - r, x + r) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha$, adică $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau$.

3) Fie $A, B \in \tau$. Dacă $A \cap B = \varnothing$ atunci $A \cap B \in \tau$.

Presupunem că $A \cap B \neq \varnothing$ şi fie $x \in A \cap B$.

$x \in A$ şi $A \in \tau \Rightarrow \exists r_1 > 0$ astfel încât $(x - r_1, x + r_1) \subset A$.
$x \in B$ şi $B \in \tau \Rightarrow \exists r_2 > 0$ astfel încât $(x - r_2, x + r_2) \subset A$.
Fie $r = \min(r_1, r_2)$. Atunci
$(x - r, x + r) \subset A$, $(x - r, x + r) \subset B$, deci $(x - r, x + r) \subset A \cap B$ de unde deducem că $A \cap B \in \tau$.

**Exemplul 1.1.4.** Fie $X = \mathbb{C}$; definim pe $\mathbb{C}$ topologia $\tau$ în felul următor: $A \in \tau$ dacă

i) $A = \varnothing$ sau ii) dacă $A \neq \varnothing$, $\forall z \in A$, $\exists r > 0$ astfel încât $\forall y \in \mathbb{C}$ cu $|y - z| < r$, avem $y \in A$.

Se verifică, similar cu exemplul 1.1.3., că mulțimile $A \in \tau$ astfel definite, satisfac condițiile de definiție ale unei topologii.

**Definiția 1.1.5.** Fie $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ cu $a < b$, $c < d$. Produsul cartezian $(a,b) \times (c,d) = \{(x,y) | x \in (a,b),\ y \in (c,d)\}$ se numeşte *interval bi-dimensional deschis*.

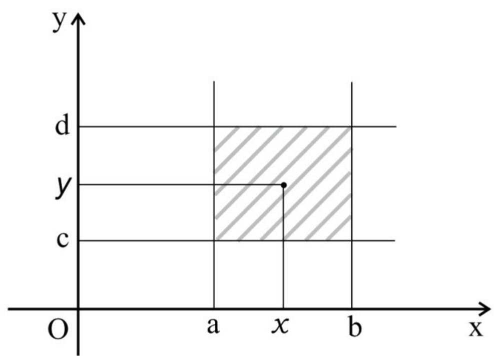


Figura 1.1

Mai general, în $\mathbb{R}^n$, pentru $a_i < b_i$, $a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $i = \overline{1,n}$, mulțimea $I_n = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ se numeşte *interval deschis $n$-dimensional*.

**Exemplul 1.1.6.** Fie $X = \mathbb{R}^n$. Pe $\mathbb{R}^n$ definim următoarea topologie $\tau$: $A \in \tau$ dacă
i) $A = \varnothing$ sau ii) dacă $A \neq \varnothing$, $\forall x \in A$, $\exists I_n$ (interval deschis $n$-dimensional) astfel încât $x \in I_n \subset A$.

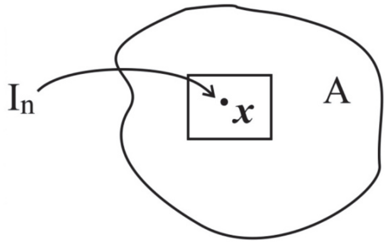


Figura 1.2

($\tau$ se mai numeşte *topologia naturală* pe $\mathbb{R}^n$).

**Exemplul 1.1.7.** Fie $X \neq \emptyset$, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Se verifică uşor că $\tau$ este o topologie, numită *topologia indiscretă* (sau *grosieră*) a lui $X$.

**Exemplul 1.1.8.** Fie $X \neq \emptyset$, $\tau = \mathcal{P}(X)$ (mulțimea părților lui $X$). Atunci $\tau$ este o topologie pe $X$, numită *topologia discretă* a lui $X$.

**Observația 1.1.9.** Din exemplele 1.1.7., 1.1.8. vedem că pe o mulțime dată putem construi mai multe topologii. În paragraful 1.6 vom vedea cum pot fi comparate două sau mai multe topologii pe aceeaşi mulțime.

**Exemplul 1.1.10.** Fie $X = \mathbb{N}$. Pe $\mathbb{N}$ construim următoarea topologie $\tau$: $A \in \tau$ dacă i) $A = \emptyset$ sau ii) dacă $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{N}$ atunci $\forall p \in A$, $p$ este număr prim; sau
iii) $A = \mathbb{N}$.
Verificăm cele trei condiții de definiție a unei topologii:
1) $\emptyset, \mathbb{N} \in \tau$, din construcție;
2) Fie $(D_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau$. Dacă $\exists \alpha_0 \in I$ cu $D_{\alpha_0} = \mathbb{N}$, atunci $\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \mathbb{N} \in \tau$.
Dacă $\forall \alpha \in I, D_\alpha \neq \mathbb{N}$ atunci:
2.1. Dacă $\exists J \neq \emptyset, J \subset I$ astfel încât $\emptyset \neq D_\beta \neq \mathbb{N}, \forall \beta \in J$ şi $D_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in I \setminus J$, atunci:

$$\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} D_\beta$$

şi fiecare mulțime $D_\beta$ este formată numai din numere prime, deci $\bigcup_{\beta \in J} D_\beta$ este formată numai din numere prime. Rezultă atunci

$$\bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} D_\beta \in \tau.$$

2.2. Dacă $D_\alpha = \varnothing, \forall \alpha \in I$ atunci $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha = \varnothing \in \tau.$

3) Fie $A, B \in \tau.$

3.1. Dacă $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap B \in \tau;$

3.2. Dacă $A \cap B \neq \varnothing$, distingem cazurile:

3.2.1. $A = B = \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = \mathbb{N} \in \tau;$

3.2.2. $A = \mathbb{N},\ B \neq \mathbb{N} \Rightarrow A \cap B = B \in \tau$ (similar pentru $A \neq \mathbb{N},\ B = \mathbb{N}$);

3.2.3. $A, B \neq \mathbb{N}$, atunci $A \cap B$ va conține numerele prime comune lui $A$ şi $B$, deci $A \cap B \in \tau$.

**Exemplul 1.1.11.** Fie $X \neq \varnothing$. Definim pe $X$ următoarea topologie $\tau$: $A \in \tau$ dacă i) $A = \varnothing$ sau ii) dacă $A \neq \varnothing$, atunci $X \setminus A$ este finită sau vidă. Să probăm că $\tau$ este o topologie:

1) $\varnothing \in \tau$ (din construcție), iar dacă $A = X$, $X \setminus A = \varnothing$, deci $X \in \tau$;

2) Fie $\left(D_\alpha\right)_{\alpha \in I} \subset \tau$. Dacă $\forall \alpha \in I, D_\alpha = \varnothing$, atunci $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha = \varnothing \in \tau$. Dacă $\exists \alpha_0 \in I$ cu $D_{\alpha_0} \neq \varnothing$, atunci $X \setminus D_{\alpha_0}$ este finită sau vidă; cum $X \setminus \left( \bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \right) \subset X \setminus D_{\alpha_0}$, deducem că $X \setminus \left( \bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \right)$ este finită sau vidă, deci $\bigcup\limits_{\alpha \in I} D_\alpha \in \tau$.

3) Fie $A, B \in \tau$ cu $A \cap B \neq \varnothing$. Notăm cu $\mathcal{C}A$ (respectiv $\mathcal{C}B$) mulțimile $X \setminus A$ (respectiv $X \setminus B$) adică complementarele lui $A$ şi $B$.

Avem că

$$\mathcal{C}\left(A \cap B\right) = \left(\mathcal{C}A\right) \cup \left(\mathcal{C}B\right)$$

Dar $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, deci $\mathcal{C}A$ şi $\mathcal{C}B$ sunt finite sau vide, deci $\left(\mathcal{C}A\right) \cup \left(\mathcal{C}B\right)$ este finită sau vidă. Obținem deci:

$$A \cap B \in \tau.$$

**Definiția 1.1.12.** Dacă $X \neq \varnothing$ şi $\tau$ este o topologie pe $X$, atunci perechea $\left(X, \tau\right)$ se numeşte *spaţiu topologic*.

**Definiția 1.1.13.** Fie $\left(X, \tau\right)$ un spațiu topologic.

a) Fie $x \in X, V \subset X$ spunem că $V$ este o *vecinătate a lui* $x$ dacă $\exists D \in \tau$ cu $x \in D \subset V$.

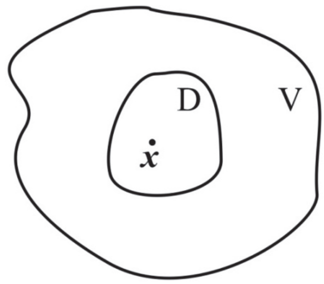


Figura 1.3

Mulțimea tuturor vecinătăților lui $x$ se notează $\mathcal{V}_x$.

b) Fie $A \subset X$, $V \subset X$ spunem că $V$ este o *vecinătate a lui* $A$ dacă $\exists D \in \tau$ cu $A \subset D \subset V$. Vom nota cu $\mathcal{V}_A$ mulțimea tuturor vecinătăților mulțimii $A$.

**Teorema 1.1.14.** *Fie* $(X,\tau)$ *un spaţiu topologic şi* $A \subset X$. *Sunt echivalente afirmaţiile:*

*1)* $A \in \tau$;

*2)* $\forall x \in A,\ A \in \mathcal{V}_x$.

*Demonstraţie.*

$1) \Rightarrow 2)$ Cum $A \in \tau$, avem $x \in A \subset A$, deci $A \in \mathcal{V}_x$.

$2) \Rightarrow 1)$ $\forall x \in A,\ \exists D_x \in \tau$ cu $x \in D_x \subset A$. Atunci, evident, $A = \bigcup\limits_{x \in A} D_x$ şi, din a doua condiție din definiția unei topologii, rezultă $A \in \tau$. ■

**Observația 1.1.15.** Teorema 1.1.14. afirmă că o mulțime nevidă este deschisă dacă şi numai dacă este vecinătate pentru orice punct al său.

**Definiția 1.1.16.** Fie $(X,\tau)$ un spațiu topologic, $A \subset X$, $x \in X$. Spunem că $x$ este *punct interior* al mulțimii $A$ dacă $A \in \mathcal{V}_x$.

Mulțimea $\mathring{A} = \{x \in X \mid x \text{ este punct interior al lui } A\}$ se numeşte *interiorul lui* $A$.

**Propoziția 1.1.17.** *Fie* $(X,\tau)$ *un spaţiu topologic,* $\emptyset \neq A \subset X$. *Atunci* $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

*Demonstraţie.*

i) Fie $x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists D_x \in \tau$ cu $x \in D_x \subset A \Rightarrow \mathring{A} \subset \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

ii) Fie acum $x \in \bigcup\limits_{\substack{D\in\tau \\ D\subset A}} D$, deci $A \in \mathcal{V}_x$, de unde $x \in \mathring{A}$. Aşadar $\bigcup\limits_{\substack{D\in\tau \\ D\subset A}} D \subset \mathring{A}$. ■

**Exemplul 1.1.18.** Fie $X = \mathbb{R}$, $\tau$ topologia definită în exemplul 1.1.3. Fie $A = \{1\} \cup [2,3)$. Să determinăm $\mathring{A}$.

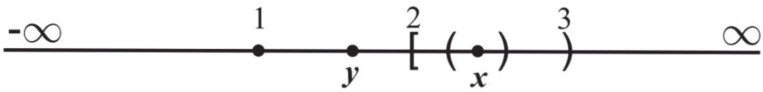


Figura 1.4

Pentru $x \in (2,3)$, $\exists r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subset (2,3)$. Rezultă $x \in (x-r, x+r) \subset\subset (2,3) \subset A$. Dar, din exemplul 1.1.3. rezultă că orice interval de tipul $(x-r, x+r) \in \tau$ (pentru că se poate conține pe el însuşi!). Deducem că $A \in \mathcal{V}_x$, deci $x \in \mathring{A}$. Fie acum $x = 2$ şi vom proba că $2 \notin \mathring{A}$. Să presupunem prin absurd că $2 \in \mathring{A}$, deci $A \in \mathcal{V}_2$, adică $\exists D \in \tau$ cu $2 \in D \subset A$. Atunci, $\exists r > 0$ astfel încât $(2-r, 2+r) \subset D \subset A$ fals, deoarece $\forall y \in (1,2)$, $y \notin A$. Aşadar $2 \notin \mathring{A}$ şi, analog, $1 \notin \mathring{A}$. Deducem că $\mathring{A} = (2,3)$.

**Exemplul 1.1.19.** Fie $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Arătăm că $\mathring{A} = \varnothing$.

Să presupunem prin absurd că $\exists k \in \mathbb{N}^*$ cu $\frac{1}{k} \in \mathring{A}$, deci $A \in \mathcal{V}_{\frac{1}{k}}$; ca şi în exemplul 1.1.18., ar rezulta că $\exists r > 0$ astfel încât $\left( \frac{1}{k} - r, \frac{1}{k} + r \right) \subset A$, ceea ce este fals, întrucât $\forall y \in \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$, $y \notin A$.

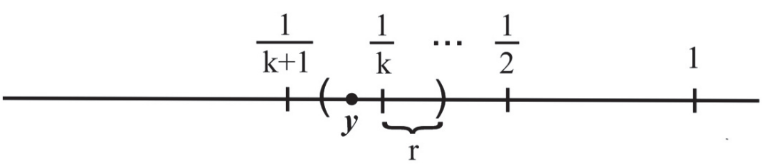


Figura 1.5